

CU PRIVIRE LA CONDIȚIA DE DERIVABILITATE ÎN REDUCȚIE*

Balzer, Moulines și Sneed oferă într-un proiect recent¹ o discuție extinsă a celor mai importante relații interteoretice globale. Printre ele, reducția ocupă un loc central de interes. Cred că felul în care autorii tratează reducția este important din cel puțin două motive: în primul rând, este avansat un concept precis și funcțional al reducției; și, în al doilea rând, tratarea lor oferă cea mai explicită enunțare de până acum a opiniilor asupra rolului limbajului în înțelegerea filozofică a științei de către cei trei susținători de seamă ai structuralismului. În această lucrare încerc să studiez în mai mare detaliu acest din urmă aspect. Voi porni de la comentariile făcute de Balzer, Moulines și Sneed asupra rolului condiției de “derivabilitate” în reducție și voi ajunge la concluzia că unele dintre ele sunt în cel mai bun caz ambigue și că încercarea de a reconstrui formal respectiva condiție din *An Architectonic for Science* nu este una satisfăcătoare. În final, este schițată o nouă reconstrucție a rolului condiției de “derivabilitate” în relațiile de reducție.

I

Fie T și T^* teorii element idealizate. Pentru ca teoria T să se reducă direct la T^* ($T \rho T^*$), este necesar să fie respectate următoarele condiții:

(A) Pentru oricare x, x^* : dacă $x^* \in M^*$ și $(x^*, x) \in \rho$, atunci $x \in M$. Aici M^* (respectiv M) reprezintă mulțimea de modele ale lui T^* (respectiv ale lui T), iar ρ este o relație de reducție, care pune în legătură modelele potențiale ale celor două teorii ($\rho \subseteq Mp^* \times Mp$)². În formularea autorilor, (A) exprimă o condiție generală de derivabilitate a legilor lui T din legile lui T^* , prin medierea lui ρ ³. Astfel, neformalizat, se consideră că (A) înseamnă⁴:

(B) Legile lui T pot fi derivate (sub traducere) din cele ale lui T^* .
Totuși, când încercăm să exprimăm relațiile logice dintre (A) și (B) în termeni mai preciși, ne întâlnim cu multe probleme, uneori neașteptate. Una dintre ele este următoarea. Conceptul general al reducției a fost definit astfel încât să nu conștie dintr-o traducere mutuală a limbajului celor două teorii sau nici chiar să conducă la ea. Deci, (B) poate fi interpretată într-un fel care nu presupune vreo referință la limbajul teoriilor T și T^* . Pentru a realiza acest lucru, trebuie să definim întâi conceptul de lege pentru teoria T . Să spunem că o lege pentru T este o clasă X de modele potențiale ale sale astfel încât M

* Aș dori să-i mulțumesc profesorului W. Balzer pentru comentariile utile și critica făcută unei versiuni preliminare a acestei lucrări.

¹ W. Balzer, C.U.Moulines, J.D. Sneed, *An Architectonic for Science*, D. Reidel, Dordrecht, 1987.

² *Ibidem*, pp. 277. (A) este de fapt condiția (3) a definiției CVI-5.

³ *Ibidem*, p. 275.

⁴ Vezi, de asemenea, p. 308.

$\subseteq X$; și analog pentru T^* . După aceea, trebuie să ne asigurăm că “derivabilitatea” legii X dintr-o lege X^* este mediată de ρ . Conținutul lui (B) poate fi acum redat prin:

(C) Pentru orice lege X a lui T există o lege X^* a lui T^* astfel încât $X^* \Vdash X$.

Ceea ce avem acum de făcut este să facem precis înțelesul relației de derivabilitate \Vdash . Evident, \Vdash nu poate fi definită prin, să zicem, $X^* \subseteq X$, pentru că nu este presupusă nici o conexiune între mulțimile Mp^* și Mp .

Există, totuși, două cerințe intuitive care trebuie respectate pentru ca \Vdash să țină:

(c. 1) X^* trebuie să depindă cumva de X și de relația de reducere ρ .

(c. 2) De câte ori un model x^* al lui T^* aparține lui X^* , modelul corespondent x (via relația ρ) al lui T aparține lui X .

Să încercăm să analizăm mai detaliat aceste cerințe. În primul rând, să observăm că (c. 2) poate fi redată simplu prin:

(c. 2') pentru oricare x^* și x : dacă $x^* \in M^*$ și $x^* \in X^*$, atunci $\rho(x^*) = x$ este astfel încât $x \in M$ și $x \in X$.

În al doilea rând, din moment ce X^* este submulțimea lui M^* care conține toate și numai acele x^* care sunt ρ -corelate cu cel puțin unele $x \in X$, (c. 1) revine la:

(c. 1') $X^* = \{x^*: \text{există un } x \text{ astfel încât } x \in X \text{ și } \rho(x^*, x)\}$

Putem defini acum relația de derivabilitate \Vdash după cum urmează: $X^* \Vdash X$ dacă X^* și X sunt astfel corelate încât se respectă cerințele (c. 1') și (c. 2'). În consecință, (C) devine:

(C') Dacă X este o lege a lui T , atunci pentru oricare x^* , x : dacă $x^* \in M^*$ și există un x' astfel încât $x' \in X$ și $\rho(x^*, x')$, atunci, dacă $\rho(x^*) = x$, $x \in M$ și $x \in X$.

Mai mult, dacă luăm X drept clasa Mp a tuturor modelelor potențiale ale lui T , atunci dat fiind că cuantificatorii “oricare x ” și “există un x ” au ca domeniu membrii lui Mp , putem omite orice expresie cum ar fi $x \in X (=Mp)$. Prin urmare, (C') se simplifică la:

(C'') Pentru orice x^* , x : dacă $x^* \in M^*$ și există un x' astfel încât $\rho(x^*, x')$, atunci, dacă $\rho(x^*) = x$, atunci $x \in M$.

Este important să remarcăm că propoziția “există un x' astfel încât $\rho(x^*, x')$ ” – sau, mai formal, “ $(\exists x) \rho(x^*, x)$ ” – afirmă că x^* este un membru al domeniului funcției (parțiale) ρ , adică $x^* \in \text{Dom}(\rho)$. Este acum evident că, dacă conținutul lui (B) este redat model-teoretic (deși ca un caz special) prin (C''), atunci de fapt am adoptat interpretarea oferită de Balzer, Moulines și Sneed⁵ lui (A):

(A') $(\forall x) (\forall x^*) (x^* \in M^* \cap \text{Dom}(\rho) \rightarrow \rho(x^*) \in M)$

((C'')) a fost puțin modificată astfel încât cuantificatorul “pentru oricare x ”, contrar apariției sale în (A'), să nu fie vid; pentru că în (A') x nu apare în domeniul lui $\forall x$.

În concluzie, nu sunt de acord cu Balzer, Moulines și Sneed că (A'), și prin urmare (C''), nu exprimă o condiție de “derivabilitate” a legilor lui T din cele ale lui T^* . Exprimă una, dar fără nici o referință la limbaj. În acest caz, expresia “sub traducere” din (B) trebuie înțeleasă ca referindu-se la corelația dintre M^* și M via relația de reducere ρ . Să observăm de asemenea că de fapt (C'') și (A') sunt logic echivalente cu (A). Deci, dacă acestea sunt luate ca exprimând înțelesul lui (B), atunci condiția de “derivabilitate” este pur și simplu *echivalentă* cu (B).

II

⁵ *Ibidem*, p. 310.

Totuși, Balzer, Moulines și Sneed par să interpreteze expresia “sub traducere”, și prin urmare toată expresia (B), ca implicând considerații lingvistice. Ei consideră că “traducere” se referă la o relație între propoziții ale limbajului L al T și propoziții ale limbajului L^* al T^* , și concep legile ca entități lingvistice, care trebuie corelate prin conexiuni sintactice. Desigur, dacă nu ne angajăm față de limbaj, (A') și (C^*) pot fi privite ca fiind echivalente cu (B), adică cu susținerea că legile lui T pot fi derivate (cu anumite restricții) din cele ale lui T^* . Dar, dacă considerăm că T și T^* implică constructe lingvistice, atunci, în formularea lui Balzer, Moulines și Sneed, conținutul lui (B) devine⁶:

$$(D) (\forall \alpha \in a) (trad^1(a^*) \vdash \alpha)$$

unde a și a^* sunt mulțimi de axiome ale lui T respectiv T^* , și $trad$ este o funcție care pune în corespondență propozițiile lui L cu propozițiile lui L^* . Din moment ce nu există aici posibilitatea vreunei confuzii, voi scrie simplu \vdash pentru \vdash_L . Problema noastră în ce privește condiția de “derivabilitate” revine acum la a întreba dacă, și în ce condiții, (A') (sau (C')) este logic echivalentă cu (D).

Să considerăm demonstrația, rezumată în TVI-15, că cele două expresii sunt, în anumite condiții, logic echivalente⁷. Demonstrația constă în a arăta că (A') este echivalentă cu (D) dacă sunt respectate următoarele condiții: T , T^* sunt teorii element idealizate în limbajul L , L^* iar a , a^* , $trad$ și ρ sunt astfel încât:

1. a) $a \subseteq Prop(L)$, $a^* \subseteq Prop(L^*)$
 b) $trad: Prop(L) \rightarrow Prop(L^*)$
 c) L and L^* sunt limbaje de ordinul I
 d) $\rho: Mp'' \rightarrow Mp$ este o funcție parțială
2. a) $Mod(a) = M$, $Mod(a^*) = M^*$
 b) $Rge(\rho) = Mp$
 c) pentru orice $\alpha \in Sent(D)$ și orice $x^* \in Dom(\rho)$,
 $\rho(x^*) \Vdash \alpha$ ddacă $x^* \Vdash trad(\alpha)$
3. a) pentru oricare $\alpha^* \in a^*$ există un $\alpha \in a$ astfel încât $trad(\alpha) = \alpha^*$
 b) $trad^1(a^*)$ este finită

Am enunțat condițiile (1)-(3) într-un mod diferit de cel al lui Balzer, Moulines și Sneed pentru a face mai clară semnificația lor. Condițiile (1) sunt structurale, și arată natura logică a conceptelor în discuție; condițiile (2) sunt materiale, și se referă la proprietățile logice pe care trebuie să le aibă acele concepte pentru a fi folosite în reconstrucția formală a, de exemplu, relației de reducere. Condițiile (3) sunt cele mai neobișnuite, fiind acele asumții speciale necesare pentru asigurarea echivalenței logice a lui (A') și (D). Prin urmare, nu ar trebui să fie o surpriză că în cele ce urmează mă voi concentra doar asupra utilizării lui (3a) și (3b) în demonstrația teoremei TVI-15.

Condiția (3a) este în mod esențial implicată în demonstrarea părților de necesitate și suficiență ale TVI-15. Dar cred că (3a) este foarte nerealistă, cum par să recunoască chiar Balzer, Moulines și Sneed.⁸ Nu-mi pot imagina nici o relație autentică (adică non-simetrică) de reducere care să permită tuturor corespondențelor axiomelor lui T^* să se

⁶ Acest lucru este implicit în enunțul teoremei TVI-15, p. 310.

⁷ *Ibidem*, p. 309-311.

⁸ *Ibidem*, p. 308.

numere printre axiomele lui T . Totuși, principalul meu argument împotriva lui (3a) este că ea nu este nici măcar necesară în încercarea de a arăta că (B) transmite aceeași informație ca și (A). Voi demonstra mai jos că (D) nu este o formulare adecvată a conținutului limbaj-teoretic al lui (B). Dar înainte de aceasta aș dori să spun câteva cuvinte despre (3b). Aceasta este o condiție prea tare, și de fapt demonstrația lui TVI-15 nu o cere. Balzer, Moulines și Sneed folosesc condiția (3b) pentru a arăta că (A') implică (D) în felul următor. Fie $\alpha \in a$. S-a arătat deja că:

$$\text{Mod}(\text{trad}^1(a^*)) \subseteq \text{Mod}(\{\alpha\}).$$

Condiția (3b) împreună cu teorema de completitudine pentru limbajul de ordinul întâi L par să implice că $\text{trad}^1(a^*) \vdash \alpha$. Dar în acest pas al demonstrației nu este necesar să recurgem la (3b). Într-adevăr, teorema de completitudine (generalizată) pentru logica de ordinul întâi este următoarea⁹: dacă Σ este o mulțime de propoziții (finită sau infinită), iar α este o propoziție, atunci $\text{Mod}(\Sigma) \subseteq \text{Mod}(\alpha)$ ddacă $\Sigma \vdash \alpha$. Deci, $\text{trad}^1(a^*)$ nu trebuie să fie finită pentru a da rezultatul dorit. Eu presupun că există o anumită confuzie în demonstrația pe care Balzer, Moulines și Sneed o dau teoremei TVI-15. Să ne reamintim că $\text{trad}^1(\alpha^*)$, pentru $\alpha^* \in a^*$, este o propoziție a lui L , și $\text{trad}^1(a^*)$ este o clasă de propoziții a lui L . Dacă este finită, atunci $\bigwedge \text{trad}^1(a^*)$ este conjuncția propozițiilor din $\text{trad}^1(a^*)$, și este o propoziție a lui L . Atunci, prin completitudine, $\text{Mod}(\Sigma) \subseteq \text{Mod}(\alpha)$ ddacă $\vdash \Sigma \rightarrow \alpha$, și în cazul nostru obținem

$$(D') (\forall \alpha \in a) (\vdash \bigwedge \text{trad}^1(a^*) \rightarrow \alpha)$$

Este ușor să arătăm acum că (D') implică (D) (aici este folosită teorema de deducție); dar (D) implică (D') (iarăși prin folosirea teoremei de deducție) numai dacă are loc (3b), adică dacă $\text{trad}^1(a^*)$ este finită.

III

Cred că discuția despre importanța lui TVI-15 suferă de pe urma interpretării greșite a înțelesului lui (B). Când se afirmă în (B) că legile lui T vor fi derivate *sub* traducere din cele ale lui T^* , ideea nu este, desigur, că trebuie să traducem legile lui T^* în legile lui T ; desigur, este o pistă greșită să ne concentrăm asupra derivabilității legilor lui T din cele ale lui T^* în T . Mai degrabă, ceea ce implică (B) este că legile lui T^* permit derivabilitatea traducerilor (în L^* !) ale legilor lui T . Pentru a vedea acest lucru, să considerăm întâi un analog sintactic al lui (C). Sintactic, T și T^* sunt clase (deductiv închise) de propoziții. O lege a lui T este o propoziție X a lui L astfel încât $T \vdash X$; și analog pentru T^* . Trebuie de asemenea să ne asigurăm că “derivabilitatea” unei legi X dintr-o lege X^* este mediată de relația de reducere ρ . Dacă teoriile T și T^* sunt construite ca entități lingvistice, atunci conținutul lui (B) poate fi redat prin:

(E) Pentru orice lege X a lui T există o anumită lege X^* a lui T^* astfel încât $X^* \parallel X$.

Lăsând la o parte faptul că în (E) termenul “lege” se referă la lucruri destul de diferite de cele la care s-a referit în (C), singura diferență dintre (E) și (C) este că relația de “derivabilitate” “ \parallel ” a fost înlocuită de relația de “derivabilitate” “ \vdash ”; cea dintâi este o relație semantică, cea de-a doua trebuie concepută ca o relație sintactică. Cum putem preciza mai bine relația “ \parallel ”? Evident, aceasta nu poate fi definită direct în funcție de \vdash_{L^*}

⁹ Vezi, de exemplu, C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, North Holland, Amsterdam, 1973.

pentru că X^* este o propoziție a lui L^* , în timp ce X este o propoziție a lui L ; și, din aceleași motive, nu poate fi definită direct în funcție de \vdash_L . Dar putem enunța, cum am făcut în cazul lui \Vdash , două cerințe intuitive care trebuie respectate pentru ca \Vdash să aibă loc:

(e. 1) X^* trebuie să depindă cumva de X și de relația de reducere ρ .

(e. 2) De câte ori X este derivabilă din T , de asemenea X^* trebuie să fie derivabilă din T^* .

Putem defini acum relația de derivabilitate $\Vdash : X^* \Vdash X$ dacă X^* și X sunt corelate astfel încât se respectă condițiile (e.1) și (e.2) – sau versiuni ale acestora reconstruite în mod adecvat. Să observăm, mai întâi, că cerința (e.2) afirmă doar că:

(e.2') Dacă $T \vdash_L X$, atunci $T^* \vdash_L X^*$

Deoarece X este arbitrară, putem infera că

(e.2'') Pentru orice X , dacă $T \vdash_L X$, atunci $T^* \vdash_L X^*$

Să ne amintim că T și T^* sunt clase deductiv închise de propoziții, prin urmare dacă (e.2') ține pentru orice $\alpha \in a$, atunci ține pentru orice X și prin urmare (e.2'') ține de asemenea. Deci, să presupunem că

(e₁) Pentru orice $\alpha \in a$: dacă $T \vdash_L \alpha$, atunci $T \vdash_{L^*} \alpha^*$

Dar evident pentru orice $\alpha \in a$, $T \vdash_L \alpha$ ține, și prin urmare (e₁) este logic echivalentă cu:

(e₂) Pentru orice $\alpha \in a$: $T \vdash_{L^*} \alpha^*$

Cum, mai mult, T^* este închisă deductiv și este axiomatizată prin a^* , avem

(e₃) Pentru orice b^* : $T \vdash_{L^*} b^*$ dacă $a^* \vdash_{L^*} b^*$

Dar potrivit lui (e₃), (e₂) este logic echivalentă cu:

(e₄) Pentru orice $\alpha \in a$: $a^* \vdash_{L^*} \alpha^*$

Desigur, (e₄) implică deductiv pe (e.2'').

Să trecem acum la condiția (e.1). Primul candidat pentru X^* care ne vine în minte este chiar $trad(X)$. Prin urmare, am putea încerca să precizăm pe (e.1) prin:

(e.1) $X^* = trad(X)$

și în particular am avea $\alpha^* = trad(\alpha)$. Dacă adoptăm această cale, ne putem reîntoarce acum la expresia (E). Obținem o variantă precisă a ei dacă substituim pe α^* (e₄) cu $trad(\alpha)$:

(E') $(\forall \alpha \in a) (a^* \vdash_{L^*} trad(\alpha))$

(E') poate fi comparată cu (D). Diferența dintre ele este că în timp ce cu (D) Balzer, Moulines și Sneed au asumat că “traducerea” menționată în (B) este o traducere în L a lui T^* , și deci condiția de “derivabilitate” se referă la derivabilitatea în T , (E') mută discuția în interiorul lui L^* , și prin urmare sunt luate în considerare puterile deductive ale lui T^* , nu ale lui T . Cred că acest transfer se armonizează mult mai bine cu intuițiile noastre despre relațiile de reducere.

Abordării lui Balzer, Moulines și Sneed i se mai poate aduce următoarea obiecție: dacă X^* este construită ca $trad(X)$, atunci singura corelație dintre teoriile T și T^* este dată de funcția $trad$. Dar în mod evident acest lucru nu poate fi corect. În comentariile lor informale asupra lui (B), Balzer, Moulines și Sneed au susținut explicit că derivarea legilor lui T din T^* , sub traduceri, trebuie concepută ca fiind realizată prin intermediul lui ρ , și am acceptat această mediere și am lucrat cu ea când am reconstruit drept (C) condiția de “derivabilitate” în termenii teoriei modelelor. Totuși, nimic din (D) nu implică această mediere; și același lucru se întâmplă cu (E')! Deci, bănuiesc că eșecul de a reconstrui sintactic (B) ca implicând într-un anume fel relația ρ este unul dintre

motivele principale pentru care Balzer, Moulines și Sneed au fost nevoiți să postuleze asemenea condiții nerealiste și chiar implauzibile, cum ar fi (3a) și (3b), pentru a garanta echivalența lui (A) cu (B) (reconstruit).

Aparent deci (e.1) nu primește o interpretare satisfăcătoare dacă este reconstruită ca (e.1'). Într-adevăr, dacă legea X^* a lui T^* , corespunzând legii X a lui T , este exact traducerea (via funcția *trad*) a lui X , atunci nu există nici un loc pentru relația de reducere ρ și pentru rolul ei de mediere. Din contră, dacă ρ nu urmează să fie neglijat, (e.1') ar trebui modificat în forma:

$$(e.1'') X^* = S^* \rightarrow trad(X)$$

unde S^* este o anumită propoziție corespunzând în L^* relației semantice ρ . Voi vorbi mai pe larg despre S^* în secțiunea care urmează. Trebuie observat că, dacă preferăm pe (e.1'') lui (e.1'), atunci o reconstrucție adecvată a lui (E) ar fi, mai degrabă decât (E'), expresia:

$$(E'') (\forall \alpha \in a) (a^* \vdash_{L^*} S^* \rightarrow trad(\alpha))$$

Prin teorema de deducție, obținem:

$$(E''') (\forall \alpha \in a) (a^*, S^* \vdash_{L^*} \rightarrow trad(\alpha))$$

iar (E''') este logic echivalentă cu (E').

Dacă (E'''), mai degrabă decât (D), este considerată o reconstrucție adecvată a condiției de "derivabilitate" (B) – și sunt luate în considerare limbajele în care se formulează teoriile – atunci însăși problema la care TVI-15a încercat să dea un răspuns ar trebui să se modifice în felul următor: sarcina este să se arate că (A) reprezintă "derivabilitatea" (considerată sintactic), adică (A) este logic echivalentă cu (E'''). Dar din moment ce s-a arătat că (A) este logic echivalentă cu o condiție de derivabilitate (semantică) (A'), ce avem de făcut este să dăm o demonstrație că (probabil în anumite condiții) (A') înseamnă de fapt (E''').

Rezultatul pe care doresc să-l demonstrez este rezumat în următoarea

Teoremă: Dacă T și T^* sunt teorii element idealizate cu limbajele L, L^* , iar a, a^* , $trad$ și ρ sunt astfel încât condițiile (1a)-(1d), (2a)-(2c) și

$$(3c) \text{ Există o propoziție } S^* \in L \text{ astfel încât } Mod(S^*) = \{x^* : (\exists x)\rho(x^*)=x\}$$

sunt respectate, atunci

$$(A') (\forall x)(\forall x^*)(x^* \in M^* \cap Dom(\rho) \rightarrow \rho(x^*) \in M)$$

ddacă

$$(E'') (\forall \alpha \in a) (a \vdash_{L^*} S^* \rightarrow trad(\alpha))$$

Demonstrație.

1. (E') implică (A')

(i) prin teorema de deducție, (E'') conduce la

$$(\forall \alpha \in a) (a^*, S^* \vdash_{L^*} \rightarrow trad(\alpha))$$

Să ne amintim că (i) este de fapt expresia (E''')

(ii) prin teorema de completitudine pentru logica de ordinul I a L ,

$$Mod(a^*) \cap Mod(S^*) \subseteq Mod(trad(\alpha)), \text{ pentru orice } \alpha \in a.$$

(iii) $\{x^* : (\exists x)\rho(x^*)=x\} = Dom(\rho)$

(iv) $Mod(a^*) \cap Dom(\rho) \subseteq Mod(trad(\alpha))$, pentru orice $\alpha \in a$ (din (ii) and (iii), prin (3c))

(v) Presupunem că $x^* \in Mod(a^*) \cap Dom(\rho)$

(vi) $x^* \in Mod(trad(\alpha))$, pentru orice $\alpha \in a$ (din (v), prin (iv))

(vii) $x^* \models trad(\alpha)$, pentru orice $\alpha \in a$ (din (vi))

(viii) din moment ce $x^* \in Dom(\rho)$, există un $x \in Mp$ astfel încât $\rho(x^*) = x$

(ix) $\rho(x^*) \vDash \infty$, pentru orice $\infty \in a$ (prin (vii), (viii) și (2c))

(x) $\rho(x^*) \in M$ (din (ix))

2. (A') implică (E'')

(xi) fie $x^* \in M \cap Dom(\rho)$. Cum $x^* \in Dom(\rho)$, $\rho(x^*)$ există și aparține lui Mp .

(xii) $\rho(x^*) \in M$ (prin (A'))

(xiii) fie $\infty \in a$. Cum $\rho(x^*) \in M$, obținem $\rho(x^*) \vDash \infty$

(xiv) $x^* \vDash trad(\infty)$ (prin (xiii) și (2c))

(xv) $x^* \in Mod(trad(\infty))$

(xvi) dacă $x^* \in M^* \cap Dom(\rho)$, $x^* \in Mod(trad(\infty))$ (din (xi) and (xv))

(xvii) cum x^* a fost arbitrar ales, am arătat că

$M^* \cap Dom(\rho) \subseteq Mod(trad(\infty))$

(xviii) prin teorema de completitudine și (3c),

$a^*, S^* \vdash_{L^*} trad(\infty)$

(xix) cum $\infty \in a$ a fost arbitrar ales, obținem

$(\forall \infty \in a) (a^*, S^* \vdash_{L^*} trad(\infty))$

și, prin teorema de deducție, (xix) – care este de fapt (E''') – implică (E'')

IV

Demonstrarea teoremei cu care am înlocuit teorema TVI-15 se sprijină pe folosirea condiției suplimentare (3c). Pare necesar, prin urmare, să reflectăm pentru o clipă asupra folosirii sale în cele două părți ale demonstrației.

Mai întâi, trebuie să remarcăm că, formal vorbind, nu există nici o obiecție *a priori* la reprezentarea lui $Dom(\infty)$ ca propoziție a lui L^* . Pentru că, într-adevăr, entitățile despre care are sens să întrebăm *dacă* sunt corespondenți semantici al propozițiilor lui L^* sunt colecții de elemente ale lui Mp^* . Și, deși ρ este o colecție de perechi de modele potențiale cum ar fi (x^*, x) cu $x^* \in Mp^*$ și $x \in Mp$, $Dom(\rho) = \{x^* : (\exists x) \rho(x^*, x)\}$ este o submulțime proprie a lui Mp^* și prin urmare are sens să întrebăm *dacă* există o propoziție S^* în L^* astfel încât $Dom(\rho)$ este exact clasa modelelor lui S^* . Intuitiv, modelele strânse într-o mulțime cum ar fi $Dom(\rho)$ satisfac o anumită proprietate, și prin urmare putem să formăm o astfel de mulțime. Este firesc, cred, să considerăm că acea proprietate constă în acele condiții pe care trebuie să le satisfacă modelele teoriei reducătoare pentru a corespunde într-un sens adecvat modelelor teoriei reduse. Un caz paradigmatic de reducere interteoretică este relația dintre mecanica corpurilor rigide (MCR) și mecanica clasică a particulelor (MCP). Dintr-o perspectivă structurală, un model potențial al MCR constă dintr-un domeniu cuprinzând un singur corp rigid, împreună cu funcții care includ masa, poziția, forța, impulsul etc. Un model potențial al MCP constă dintr-o mulțime de particule, iar conceptele fundamentale ale MCP sunt reprezentate de funcții cum ar fi masa, poziția și forțele care acționează asupra elementelor din domeniu. O relație de reducere adecvată între modelele acestor două teorii corelează corpul rigid al primului model și mulțimea de particule aparținând celui de-al doilea. Dinamica corpului rigid corespunde mișcării particulelor din domeniu, și se consideră că diferitele forțe care

acționează asupra corpului corespund unei compuneri adecvate a componentelor forțelor care acționează asupra particulelor.¹⁰

Prin (3c) trebuie să existe un corespondent sintactic S^* pentru această condiție structurală. În linii mari, S^* afirmă că toate particulele sunt rigide, deci că distanțele relative ale particulelor rămân fixate în timp. Deci, S^* este o propoziție

$$(\forall p) (\forall p') (\forall t) (\forall t') (/s(p, t) - s(p', t) / = /s(p, t') - s(p', t') /)$$

a teoriei reducătoare MCP.

Totuși, lucrurile nu sunt atât de simple precum par. Pentru că trecerea la un fapt sintactic – S^* este o propoziție a lui L^* – nu este în întregime evidentă și, mai mult, câteodată ar putea fi chiar implauzibilă. Să considerăm cei doi pași în care condiția (3c) a fost folosită în demonstrația teoremei prezentate în secțiunea anterioară. În (iv), condiția (3c) a fost folosită pentru a obține, pornind de la o propoziție S^* , o clasă $Dom(\rho)$ de modele, adică trecerea a fost de la limbaje la (clase de) structuri. Să ne îndreptăm acum atenția spre (xviii), unde (3c) a fost folosită pentru a produce o propoziție S^* corespunzând unei clase $Dom(\rho)$ de structuri. Această trecere a fost de la (clase de) structuri la limbaj.

Pentru fiecare propoziție a unui limbaj de ordinul I putem găsi întotdeauna o clasă de structuri ale aceluși limbaj care conține toate și numai acele structuri în care propoziția este adevărată. Când este aplicat la cazul nostru particular, acest fapt fundamental al teoriei modelelor devine:

(F) dacă α^* este o propoziție a limbajului L^* , atunci există o clasă $Mod(\alpha^*)$ a tuturor și numai a acelor Mp în care α este adevărată.

Din moment ce (F) trebuie să fie adevărată, demonstrația lui (iv) prin (3c) este corectă. Este important să observăm că în acest caz (3c) a fost folosit nu pentru a garanta că o clasă de modele potențiale ale lui T^* , corespunzând lui S^* , trebuie să existe – pentru că acest rol îl îndeplinește (F) – ci pentru a arăta care este acea clasă (= $Dom(\rho)$). Prin urmare, condiția (3c) a fost folosită numai ca un mijloc de a ne informa cu privire la înțelesul lui S .

O utilizare mai interesantă – și presupun că acesta este rolul *adecvat* al introducerii lui (3c) – apare la pasul (xviii). Un rezultat bine cunoscut în teoria modelelor afirmă că nu toate clasele de structuri ale unui anumit limbaj pot fi corelate cu propoziții din acel limbaj. Spunem că o asemenea clasă este elementară dacă poate fi corelată cu o propoziție, adică dacă este clasa tuturor modelelor acelei propoziții.

Dar nu există nici o rațiune a priori pentru care să considerăm însăși clasa $Dom(\rho)$ ca fiind una elementară, adică una care are un corespondent lingvistic în L . Totuși, aici apelăm la condiția (3c). Ea ne asigură că $Dom(\rho)$ are un asemenea corespondent. (3c) nu implică deductiv că orice clasă arbitrară de modele potențiale ale

¹⁰ Această procedură de compunere poate fi definită, în cazul poziției și masei, prin:

$$R(m) = \text{df. } \sum m(X) \text{ pentru toate particulele } p.$$

$$R(s, t) = \text{df. } S(p, t) \text{ pentru o anumită particulă } p \text{ astfel încât ține următoarea relație:}$$

$$\text{Pentru toate } t, R(s, t) = (\sum m(p) \cdot s(p, t)) / R(m)$$

Compunerea $R(f)$ a forțelor ce acționează asupra particulelor trebuie astfel construită încât a doua lege a lui Newton să țină, adică

$$R(f) = \text{df. } R(m) \cdot D^2R(s, t)$$

lui T^* sunt elementare; ea are în vedere numai clasa $Dom(\rho)$ și ne asigură că aceasta este elementară.

S-ar putea respinge acest argument obiectând că nu este clar de ce, pentru fiecare pereche de teorii elemente idealizate T și T^* și fiecare relație de reducere $\rho \subseteq Mp^* \times Mp$ pe care am dori să le luăm în considerare, clasa $Dom(\rho)$ ar trebui să fie elementară. Pentru multe perechi de teorii și pentru multe relații ρ care corelează modelele lor potențiale, s-ar putea într-adevăr descoperi că condiția (3c) ține. Cazul reducerii de la MCR la MCP respectă condiția (3c). Dar există arbitrar de multe moduri de a construi relația de reducere ρ , și nu avem nici o garanție că $Dom(\rho)$ este întotdeauna elementară. Dar dacă S^* nu există, nu se oferă nici o demonstrație a pasului (xviii).

Când suntem confrunțați cu această obiecție, am putea alege desigur calea eroică de a susține că (3c) este adevărată: propozițiile S^* există întotdeauna. Totuși, mai există și alte răspunsuri, mai slabe, la această obiecție. O primă strategie este de a încerca să transformăm toate aparițiile lui S^* în apariții vide. Pentru a realiza acest lucru, înlocuim (3c) prin:

$$(3c') M^* \subseteq Dom(\rho)$$

atunci sarcina teoremei este de a demonstra că (A') este logic echivalentă cu:

$$(E'') (\forall \alpha \in a) (a^* \vdash_{L^*} trad(\alpha))$$

și în (E') nu avem nici o referire la S^* . Pentru a demonstra teorema, singurul pas care trebuie refăcut este (xviii). Dar să remarcăm că (3c') implică:

$$M^* \subseteq M^* \cap Dom(\rho)$$

și aceasta, împreună cu

$$(xvii) M^* \cap Dom(\rho) \subseteq Mod(trad(\alpha)), \text{ pentru oricare } \alpha \in a \text{ implică}$$

$$M^* \subseteq Mod(trad(\alpha)), \text{ pentru oricare } \alpha \in a$$

care, prin teorema de completitudine, conduce imediat la (E').

Dacă am permite ca S^* să existe, atunci (3c) ar fi echivalentă (prin completitudine) cu:

$$a^* \vdash_{L^*} S^*$$

Dar evident acest lucru nu este plauzibil, cel puțin atunci când relația pe care teoria T o are cu T^* este aceea de a fi *direct reductibilă*. (Într-adevăr, dacă interpretăm pe T^* drept o specializare, pentru care țin condițiile de reducere exprimate de S^* , a unei alte teorii T^* , vom avea un caz de reducere *indirectă* de la T la T^*).

O altă reacție la această obiecție împotriva lui S^* este să acceptăm că în cazul general nu există nici un corespondent lingvistic al lui $Dom(\rho)$, luată ca atare; dar să subliniem că am putea întotdeauna opera, cu mijloace lingvistice, cu toate *contextele* în care apare $Dom(\rho)$. De exemplu, să ne îndreptăm din nou atenția asupra lui (xviii). Pentru a oferi un corespondent lingvistic, am presupus că aveam nevoie de propoziții corespunzând lui M^* , $Dom(\rho)$ și $Mod(trad(\alpha))$. Și, pentru că deja propozițiile necesare corespunzând primei și celei de-a treia clase de modele potențiale ale lui T^* apăreau în (xviii), singura presupunere suplimentară pe care era nevoie să o facem părea a fi: o propoziție din L^* ar trebui corelată cu $Dom(\rho)$.

Cred că acest argument nu este constrângător. Într-adevăr, dacă mai avem nevoie doar de o singură propoziție, de ce să nu cerem să fie corelată cu $Mod(a^*) \cap Dom(\rho)$, mai degrabă decât cu $Dom(\rho)$? Dacă menținem ideea intuitivă că $Dom(\rho)$ exprimă unele condiții de reducere, și respingem propunerea că $Dom(\rho)$ determină o propoziție, atunci

încă este posibil să privim $Mod(a^*) \cap Dom(\rho)$ ca o restricție asupra clasei de structuri care satisfac axiomele a^* .

Pentru a obține o asemenea restricție, o idee atrăgătoare este, desigur, să apelăm la o propoziție S^* care, atunci când este adăugată la a^* , conduce la rezultatele dorite. Este posibil, totuși, să obținem aceleași rezultate pe o cale destul de diferită. Fie α^* din L^* o consecință logică a lui a^* . Pentru fiecare asemenea expresie α^* se poate obține o colecție $Mod(\alpha^*)$ a tuturor modelelor sale. Ideea acestei strategii este de a susține că, dacă $Mod(\alpha^*)$ este elementară, atunci colecția $Mod(\alpha^*) \cap Dom(\rho)$ de modele ale L^* este de asemenea elementară, adică există o propoziție $\alpha^*(\rho)$ ale cărei modele sunt exact elementele lui $Mod(\alpha^*) \cap Dom(\rho)$. Pentru a înțelege intuitiv cum arată o propoziție $\alpha^*(\rho)$ de acest fel, să considerăm din nou relația dintre MCP și MCR. Fie, de exemplu, α^* o propoziție $(\forall p)\varphi(p)$ a MCP. În linii mari, $\alpha^*(\rho)$ este aserțiunea că φ ține dacă este restrânsă la particulele rigide. Într-o exprimare formalizată, $\alpha^*(\rho)$ este

$$(\forall p)(\forall p')((\forall t)(\forall t')(/s(p, t) - s(p', t)/ = /s(p, t') - s(p', t')/ \rightarrow \varphi(p'))$$

Există o diferență foarte profundă între strategia bazată pe (3c), și această strategie de a restricționa cuantificatorii care apar în propozițiile teoriei reducătoare. Într-adevăr, în timp ce în primul caz se presupune că se poate obține o propoziție S^* , care ar putea fi apoi folosită în reducere, în al doilea caz nu se oferă o asemenea propoziție. Mai degrabă, avem o metodă sistematică de a produce, pornind de la propozițiile teoriei reducătoare, acele propoziții ale aceleiași teorii care ne ajută să construim relația de reducere.